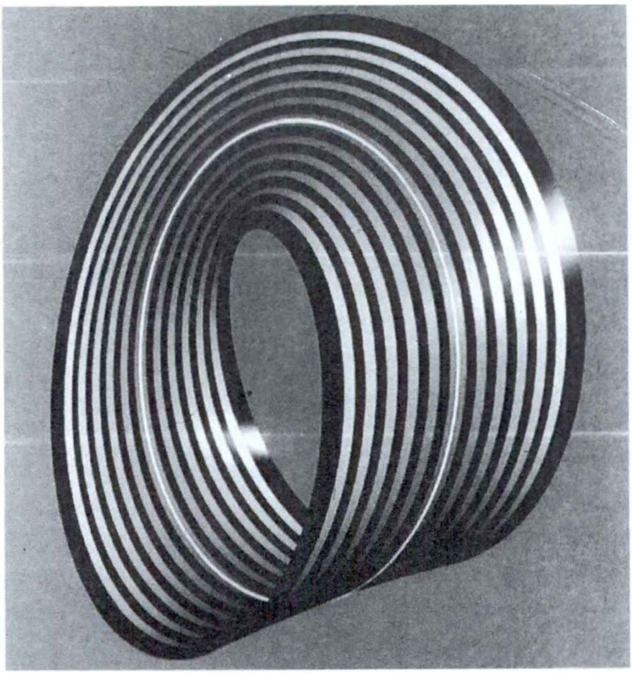
Visualització de la matemàtica

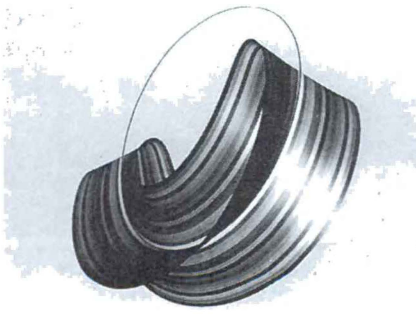
L'oblidada tradició de visualitzar la matemàtica reviu avui mercès als gràfics per ordinador. Entre els exemples de tals imatges, les que il·lustren, en el domini de la geometria algebraica, l'important procés anomenat *esclatament*, permeten apreciar, fins i tot als no-matemàtics, la riquesa de la matemàtica.

MARKUS BRODMANN

La recerca sistemàtica de les anomenades *superfícies algebraiques* va començar a la segona meitat del segle passat, en part pels treballs pioners del matemàtic bernès Ludwig Schläfli, i tal vegada l'abundància de formes que s'anaven descobrint va propiciar l'ocasió de visualitzar-les mitjançant distints models. Molts d'aquests models es van construir amb guix. També es varen produir models plegables de paper, models de fusta i els anomenats *models de Paden*. Lamentablement, molts dels models varen desaparèixer dels arxius de l'Institut de Matemàtiques en el decurs del temps, o varen romandre totalment oblidats. Paral·lelament, la matemàtica va cultivar cada cop menys aquesta tradició de visualització.



Ambdós gràfics, generats per ordinador, representen esclataments. Mitjançant un tal procés el centre d'una fulla circular s'expandeix, o «esclata», en una recta.



La vella tradició torna a viure

Avui aquesta oblidada tradició s'ha revifat gràcies a les múltiples capacitats dels gràfics per ordinador. Naturalment, un objecte matemàtic no es pot veure tan bé, estrictament parlant, amb una imatge bidimensional com mitjançant un model espacial. Aquesta mancança de la imatge bidimensional esdevé, però, àmpliament compensada mitjançant les múltiples prestacions que els ordinadors actuals ofereixen.

Aquesta forma d'il·lustració d'objectes matemàtics, a la frontera entre ciència i art, pot donar lloc a una estimulant trobada entre matemàtics i no-matemàtics. El no-matemàtic obté una impressió visible de la bellesa pròpia dels objectes matemàtics. Pot, així, copsar una part de la fascinació emanada per l'ordre i la claredat interna de les teories matemàtiques. Per altra banda, el matemàtic aprèn a veure els objectes de la seva recerca des d'un altre punt de vista, amb la qual cosa sovint es veu sorprès pels diversos atractius estètics que inesperadament es manifesten. Endemés, amb aquestes noves formes d'observació potser atenyi, insospitadament, inspiracions pel seu propi treball.

Generació de les imatges

Presentarem algunes imatges generades per ordinador en un treball conjunt amb l'Institut d'Informàtica de la Universitat de Zuric, les quals visualitzen (en un cas especial molt senzill) un procés molt important per a la geometria algebraica —el procés d'*esclatament*.

Per tal d'explicar aquest procés, i ensems la forma de generar les imatges, considerem la superfície S definida per l'equació $x = yz$, això és, el conjunt dels punts de l'espai les coordenades x, y, z dels quals compleixen la relació $x = yz$. Es tracta així d'una superfície algebraica, és a dir, d'una superfície els punts (x, y, z) de la qual són els que compleixen una equació algebraica donada. Convé dir, però, que la noció de superfície algebraica és més general, ja que comprèn «superfícies» que no es poden realitzar com a superfícies de l'espai de dimensió 3. Si $x \neq 0$ i $y = 0$, llavors és clar que no hi ha cap valor de z que satisfaci l'equació. Dit en termes més gràfics: no hi cap punt de l'eix de les x (llevat el punt d'intersecció dels tres eixos) sobre del qual hi hagi algun punt de la superfície S. D'antuvi, aquesta manca es pot adobar d'una manera purament formal si admetem un valor addicional de z que designarem amb el símbol ∞. Suposarem que la nostra equació es compleix sempre per $y = 0$ i $z = \infty$, afegint així a la superfície S els «punts a l'infinit» que en coordenades s'escriuen $(x, 0, \infty)$. Aquests punts formen una «recta a l'infinit» que resta sobre l'eix de les x.

Per tal d'entendre aquesta operació formal d'una manera geomètrica satisfactòria, ens cal precisar com s'adjunta a la superfície S l'esmentada «recta a l'infinit». A tal fi només ens cal dir com s'adjunta un «punt a l'infinit» a una recta. Això, ho farem de forma que ens acostem a aquest punt indefinidament, quan des d'un punt arbitrari de la nostra recta ens movem constantment seguint la seva direcció. La recta completada d'aquesta forma s'anomena ***recta projectiva*** i la denotem amb el símbol $\mathbf{P}^1$. En termes gràfics, per aquest procés de compleció amb un «punt a l'infinit», que es pot realitzar com a la figura 1, la nostra recta original es tanca en una circumferència.

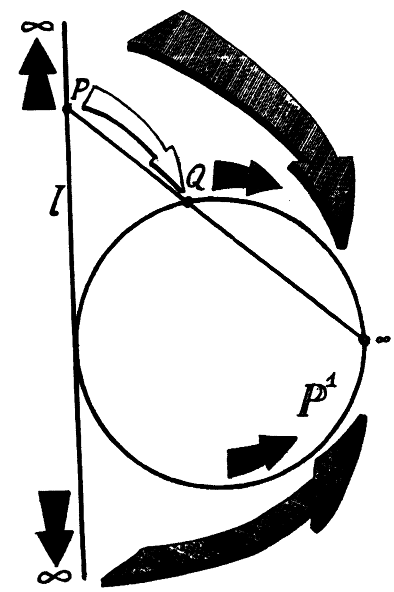


Figura 1

Ara volem emprar el procés de compleció que acabem d'explicar per tal de tancar la superfície S mitjançant «els seus punts a l'infinit» (figura 2). Per obtenir una imatge satisfactòria, escollim un disc D en el pla xy, que denotarem amb el símbol E, i considerem només la part S de la superfície S que resta sobre D. Considerem també una recta a del pla E que no talli el disc D. Donat un «punt base» F arbitrari dins el disc D, considerem el seu simètric F_∞ respecte de la recta a. Llavors podem completar la recta l_F que passa per F i és paral·lela a l'eix de les z, pel procediment que hem explicat, en una recta projectiva $\mathbf{P}^1_F$.

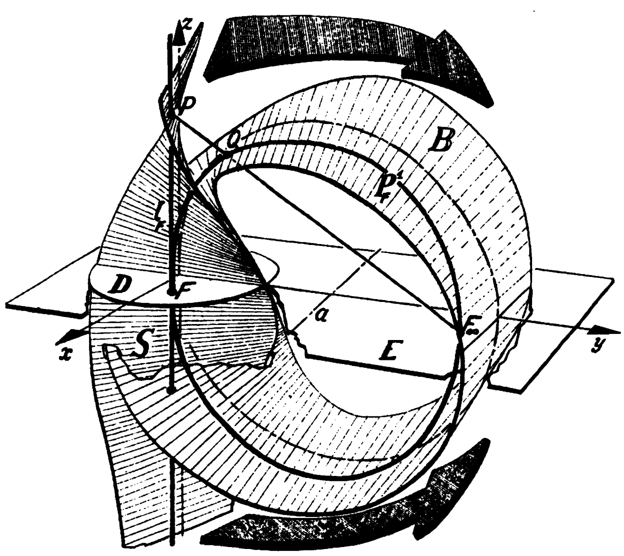
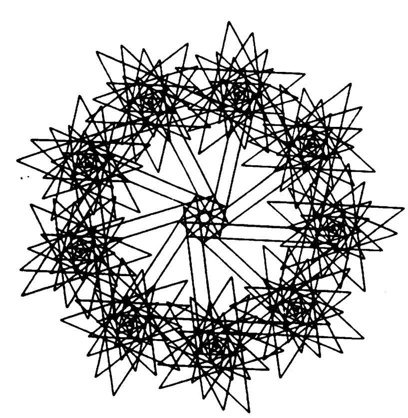


Figura 2

A cada punt P comú a la recta l_F i a $\mathbf{S}$ li correspon un punt Q. Si F és un punt de l'eix de les x, admetem F_∞ com a possible punt Q. Si ara deixem que el punt F recorri el disc $\mathbf{D}$, el conjunt dels corresponents punts Q formen una superfície $\mathbf{B}$, que, de fet, és una banda de Möbius. Intuïtivament $\mathbf{B}$ s'obté «tancant a l'infinit» la «banda torçada» S.

El que just acabem de descriure gràficament es correspon amb el procés d'*esclatament* del disc $\mathbf{D}$. Aquest procés es pot també efectuar quan l'equació inicial $x = yz$ es canvia per d'altres més complicades, com ara $x^2 = y^2z$, $x^3 = yz$, $x^2 + y^3 = y^2z, \cdots$. En casos com aquests el procés subministra, naturalment, superfícies més complicades que la banda de Möbius, com, per cert, també ho mostren els gràfics d'ordinador.

En tots aquests exemples, i dit intuïtivament, el centre del disc $\mathbf{D}$ és distanciat i substituït per una recta projectiva, això és, per una circumferència. La manera d'engalzar aquesta circumferència amb el disc en el lloc de l'allunyat centre, depèn de l'equació escollida. La idea intuïtiva segons la qual un punt (en el nostre cas el centre del disc $\mathbf{D}$) s'engruixeix, o es dilata, en una recta sencera és la raó per la qual el procés descrit s'anomena *un esclatament*. El procés d'esclatament de la geometria algebraica es defineix, però, amb molta més generalitat i usualment es trasllada a situacions en què la visualització directa no és possible per raons de dimensió. Així doncs, amb les nostres imatges ens movem per la «vora més baixa» del camp de tots els esclataments. Però només amb això ja es pot entreveure quelcom de la riquesa del domini en el qual hem fet una primera ullada.



Markus Brodmann és professor a l'Institut de Matemàtiques de la Universitat de Zuric.